

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

1. Rozważamy dwa niezależne zdarzenia  $A, B$ . Wówczas niezależne są zdarzenia

- a)  $A', B$ ;
- b)  $A, B'$ ;
- c)  $A', B'$ ;
- d)  $A, A', B, B'$ ;

gdzie  $A'$  oraz  $B'$  oznaczają zdarzenia przeciwne do zdarzeń odpowiednio  $A$  oraz  $B$ .

2. Rozważamy dwa dowolne zdarzenia  $A$  oraz  $B$ . Wówczas

- a) jeżeli  $P(B) > 0$  oraz  $P(B') > 0$ , to  $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')$ ;
- b) jeżeli  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$  oraz  $P(B') > 0$ , to  $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')}$ ;
- c) jeżeli  $P(B) > 0$ , to  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ ;
- d)  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ;

gdzie  $A'$  oraz  $B'$  oznaczają zdarzenia przeciwne do zdarzeń odpowiednio  $A$  oraz  $B$ .

3. Niech  $X$  dowolna zmienna losowa. Wówczas wariancja  $Var(X)$  spełnia

- a)  $Var(X) = E(X - EX)^2$ ;
- b)  $Var(X) = EX^2 - E^2X$
- c)  $Var(X) = \sqrt{E(X - EX)^2}$ ;
- d)  $Var(X) = E^2X - EX^2$ ;

4. Niech  $X, Y$  dowolne zmienne losowe. Wówczas kowariancja  $Cov(X, Y)$  spełnia

- a)  $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ ;
- b)  $Cov(X, Y) = E(XY) - EXEY$ ;
- c)  $Cov(X, Y) = -Cov(Y, X)$ ;
- d)  $Cov(X, Y) = EXEY - E(XY)$ ;

5. Niech  $Q_1, Q_2, Q_3$  oznaczają kwartyle rozkładu odpowiednio pierwszy, drugi i trzeci. Rozstępem międzykwartylowym nazywamy różnicę

- a)  $Q_3 - Q_1$ ;
- b)  $Q_3 - Q_2$ ;
- c)  $Q_2 - Q_1$ ;
- d)  $Q_1 - Q_2$ ;

6. Niech  $X_0, X_1, X_2, \dots$  ciąg niezależnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnym  $N(0, 1)$ . Wówczas

- a)  $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi_n^2$  – rozkład chi-kwadrat o  $n$  stopniach swobody;
- b)  $\frac{X_0}{\sqrt{(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)/n}} \sim t_n$  – rozkład t-Studenta o  $n$  stopniach swobody;

- c)  $\frac{(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)/n}{(X_{n+1}^2 + X_{n+2}^2 + \dots + X_{n+k}^2)/k} \sim F_{n,k}$  – rozkład F o  $n, k$  stopniach swobody;
- d)  $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N(0, n)$  – rozkład normalny o wartości oczekiwanej zero i wariancji równej  $n$ ;

7. Funkcja  $f$  taka, że

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } x \in (a, b), \\ 0, & \text{dla } x \notin (a, b), \end{cases}$$

jest gęstością ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa, gdy

- a)  $a = 0, b = \sqrt{2}$ ;
- b)  $a = 1, b = \sqrt{3}$ ;
- c)  $a = 0, b = 2$ ;
- d)  $a = -1, b = \sqrt{3}$ ;
8. Niech zmienna losowa  $X$  ma własność *braku pamięci*, tj. dla dowolnych  $s, t > 0$   $P(X > t + s | X > s) = P(X > t)$ . Wówczas
- a)  $X \sim Exp(\lambda)$  – rozkład wykładniczy z dowolnym parametrem  $\lambda > 0$ ;
- b)  $X \sim \chi_n^2$  – rozkład chi-kwadrat o dowolnej liczbie stopni swobody  $n$ ;
- c)  $X \sim N(0, 1)$  – standardowy rozkład normalny;
- d)  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  – rozkład normalny z dowolnymi parametrami  $\mu$  i  $\sigma^2$ ;
9. Rozważamy ciąg  $\{X_n\}$  niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (iid). Wówczas
- a) jeżeli  $p \in (0, 1)$  i  $X_n \sim B(n, p)$  (rozkład dwumianowy), to  $X_n \sim AN(np, np(1 - p))$  (asymptotyczny rozkład normalny);
- b) jeżeli  $X_n \sim \chi_n^2$  (rozkład chi-kwadrat), to  $X_n \sim AN(n, 2n)$  (asymptotyczny rozkład normalny);
- c) jeżeli istnieją dwa pierwsze momenty i  $\mu = EX_n$  oraz  $\sigma^2 = Var(X_n)$ , to

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1);$$

- d) jeżeli wartość oczekiwana istnieje i  $\mu = EX_n$ , to ciąg  $\{X_n\}$  spełnia SPWL, tj.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$ ;